Zur Theorie der endlichen einfachen Gruppen.

Von J. SZÉP in Szeged.

Die bisherigen Untersuchungen über die (endlichen) einfachen Gruppen sind im allgemeinen von zweierlei Natur. Teils handelt es sich um strukturelle Fragen bezüglich bekannter einfacher Gruppen, teils werden notwendige Bedingungen für die Einfachheit der Gruppen aufgestellt. In dieser Arbeit beweise ich einen Satz, der bezüglich der faktorisierbaren Gruppen (mit weniger Ausnahme) eine notwendige und hinreichende Bedingung der Einfachheit aufstellt. Dabei nennen wir eine Gruppe $\mathfrak{G}$ faktorisierbar, wenn sie zwei Untergruppen $\mathfrak{H}, \mathfrak{K} (\neq \mathfrak{G})$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ enthält. Jede solche Gleichung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ nennen wir eine Faktorisation von $\mathfrak{G}$.

Gewisse nur hinreichende Bedingungen für die Einfachheit von faktorisierbaren Gruppen habe ich schon früher aufgestellt.[1])

Satz. *Eine faktorisierbare Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann einfach, wenn sie keine Faktorisation $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ hat, in der der Durchschnitt $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}$ einen Normalteiler $(\neq 1)$ von $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{K}$ enthält. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, daß in allen Faktorisationen der eine Faktor maximal, von konstanter Ordnung, einfach und nicht faktorisierbar ist, dann läßt sich nämlich aus der Nichteinfachheit von $\mathfrak{G}$ nicht auf eine Faktorisation von $\mathfrak{G}$ von der obigen Eigenschaft schließen.*

Bemerkung. Ich kenne nur den trivialen Ausnahmefall, wo $\mathfrak{G}$ von der Ordnung pq ist (p, q Primzahlen).

Die Richtigkeit der Behauptung „nur dann" ist eine direkte Folgerung des Satzes.[2])

Wenn in der faktorisierbaren Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}$ $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{K}$ einen Normalteiler $\mathfrak{D}'$ hat, wofür $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{D} \supseteqq \mathfrak{D}' \neq 1$ gilt, dann ist $\mathfrak{G}$ nichteinfach.

Zum Beweis der Behauptung „dann" nehmen wir an, daß $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N} (\neq \mathfrak{G}, 1)$ enthält und dabei für $\mathfrak{G}$ nicht der Ausnahmefall des

[1]) J. SZÉP, On factorisable simple groups, *diese Acta,* **14** (1951), S. 22; Über endliche einfache Gruppen. (Zu erscheinen in den Berichten des I. Ungarischen Mathematischen Kongreßes 1950.)

[2]) J. SZÉP and L. RÉDEI, On factorisable groups, *diese Acta,* **13** (1950), S 235 - 238

Satzes vorliegt. Offenbar sind $\bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. $\bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{H}$ Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Gilt dabei $\bar{\mathfrak{H}}, \bar{\mathfrak{K}} \neq \mathfrak{G}$, so ist wegen $\mathfrak{N} \subseteq \bar{\mathfrak{H}} \cap \bar{\mathfrak{K}}$ $\mathfrak{G} = \bar{\mathfrak{H}}\bar{\mathfrak{K}}$ eine Faktorisation von $\mathfrak{G}$ von der behaupteten Eigenschaft (jetzt ist nämlich $\mathfrak{N}$ sogar in beiden Faktoren $\bar{\mathfrak{H}}$ $\bar{\mathfrak{K}}$ normal enthalten). Somit is der Satz in diesem Fall richtig, weshalb wir im folgenden

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\mathfrak{H}$$

annehmen dürfen. Gilt dabei $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{D} \neq 1$, so ist die Behauptung wieder richtig, da $\mathfrak{D}$ normal in $\mathfrak{H}$ ist. Deshalb dürfen wir auch

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N} = 1$$

annehmen. Wir unterscheiden die folgenden Fälle 1—3:

Fall 1. Enthält $\mathfrak{H}$ einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ $(\neq \mathfrak{H}, 1)$, so liefert die Untergruppe $\bar{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\mathfrak{N}$ eine gewünschte Faktorisation $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\bar{\mathfrak{N}}$, da hier $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cap \bar{\mathfrak{N}}$ normal in $\mathfrak{H}$ ist.

Fall 2. Es sei $\mathfrak{H}$ einfach aber nicht maximal. Dann gibt es eine Untergruppe $\bar{\mathfrak{H}}$ mit $\mathfrak{G} \supset \bar{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$. Hierfür gilt $\mathfrak{G} = \bar{\mathfrak{H}}\mathfrak{N}$, wodurch eine Zurückführung auf einen oben erledigten Fall geschehen ist.

Fall 3. Endlich sei $\mathfrak{H}$ einfach und faktorisierbar. Wir nehmen eine Faktorisation $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \cdot \mathfrak{H}''$. Dann gilt die Faktorisation $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}'\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{H}''\mathfrak{N}$, dabei ist $\mathfrak{N}$ in beiden Faktoren normal, womit der Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 1. August 1951.)